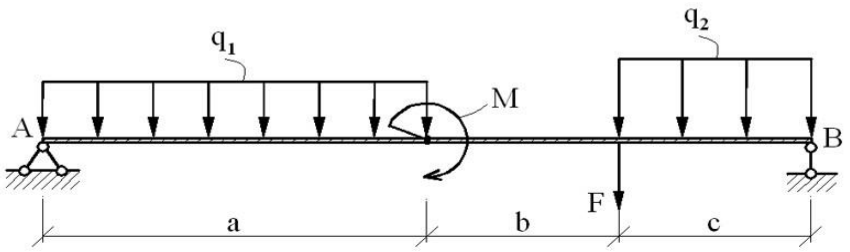
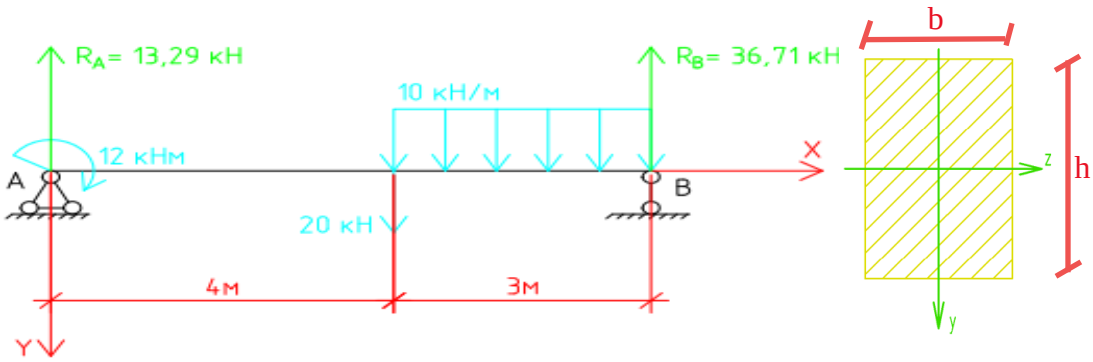
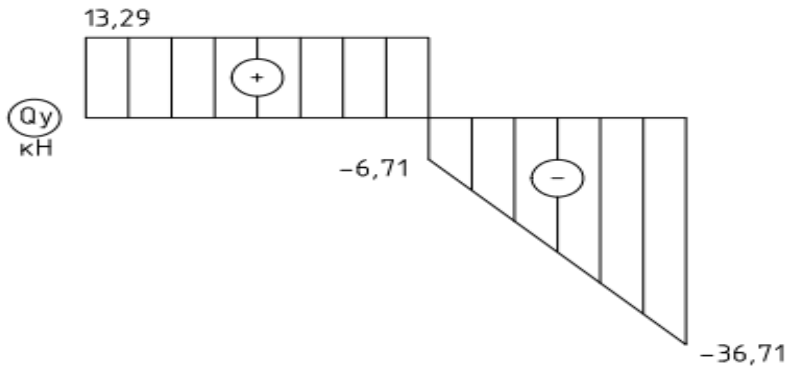
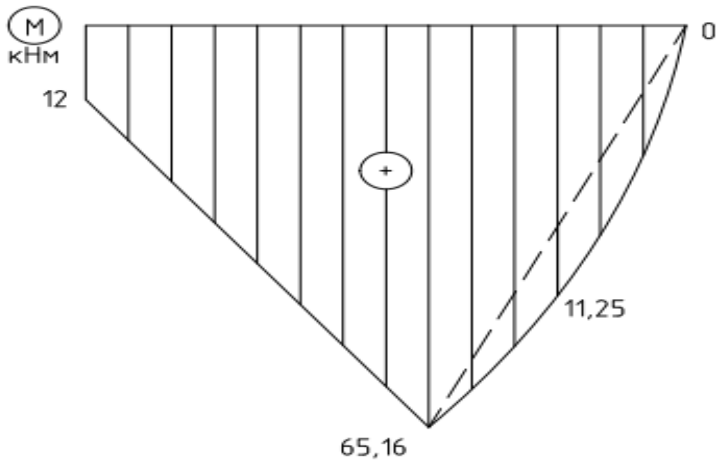
УПРАЖНЕНИЕ №2. ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ.

УПР №2 “Проверка выполнения дифференциальных уравнений равновесия”								
Ф.И.О.: Русанов Валерий								
a,м	b,м	c,м	Нормативные нагрузки	M_n, кНм	F_n, кН	q_{1n}, кН/м	q_{2n}, кН/м	Коэффициент надежности по нагрузке, γ_f
0	4	3		12	20	0	10	1.0









1. Определение опорных реакций

$$\sum M_A = 0; 12 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot\ 3 \cdot 5{,}5 - R_B \cdot 7 = 0;\ R_B = 36{,}71\ \text{кН}$$

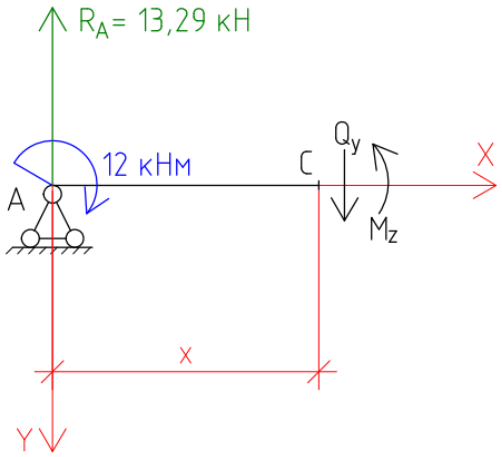
$$\sum M_B = 0; 12 - 20 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5\ + R_A \cdot 7 = 0;\ R_B = 13{,}29\ \text{кН}$$

Проверка: $\sum Y = 0;\ 13{,}29 - 20 - 10 \cdot 3 + 36{,}71; 0 = 0.$

2. Дифференциальные уравнения равновесия.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0; \end{cases} \quad (1)$$

X,Y – интенсивности объемных сил. В нашем случае X=Y=0

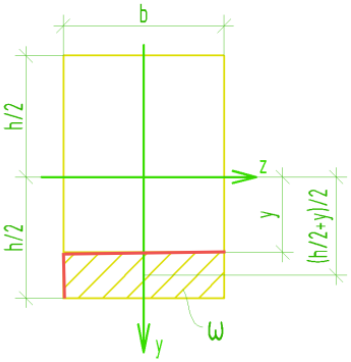


3. Участок 1 ($\mathbf{0}$ м $\leq \boldsymbol{x} \leq$ $\mathbf{4}$ м).

3.1. Найдём напряжения по формулам из сопротивления материалов и проверим выполнение уравнений (1):

$\sum \text{Mc} = 0;$
$Mz - 13{,}29 \cdot \text{x} - 12 = 0;$
$Mz = (13{,}29 \cdot \text{x} + 12)\text{кНм};$
$\sum \text{y} = 0; Q_y - 13{,}29 = 0; Q_y = 13{,}29\ \text{кН};$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{M_z}{J_z} \cdot y = (13{,}29 \cdot x + 12) \cdot \frac{y}{J_z}; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q \cdot S_z^w}{J_z \cdot b} = \frac{13{,}29}{J_z \cdot b} \cdot \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{13{,}29}{2 \cdot J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \end{cases}$$



$$S_z^w = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot 0{,}5 \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right);\ J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

3.2. Проверим, удовлетворяют ли найденные напряжения дифференциальным уравнениям равновесия:

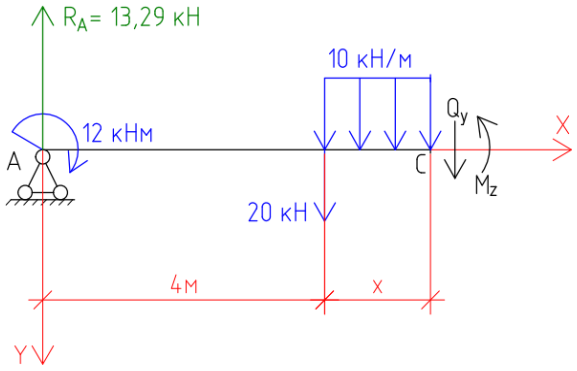
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 13{,}29 \cdot \frac{y}{J_z};\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -\frac{y \cdot 13{,}29}{J_z};$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{0}{J_z \cdot 2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0;$$

$$\begin{cases} 13{,}29 \cdot \dfrac{y}{J_z} - \dfrac{13{,}29 \cdot y}{J_z} \equiv 0; -\text{условие выполняется;} \\ 0 + 0 \equiv 0 - \text{условие выполняется.} \end{cases}$$

4. Участок 2 ($\mathbf{4}$ м $\leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{7}$ м)

4.1. Найдём напряжения по формулам из сопротивления материалов и проверим выполнение уравнений (1):



$$\sum \text{Mc} = 0;$$

$$Mz - 13{,}29 \cdot (4 + \text{x}) - 12 + 20x + 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$Mz = (13{,}29 \cdot (4 + \text{x}) + 12 - 20\text{x} - 5 \cdot \text{x}^2)\text{кНм};$$

$$\sum \text{y} = 0; Q_y - 13{,}29 + 20 + 10 \cdot x = 0;$$

$$Q_y = (-6{,}71 - 10 \cdot x)\text{кН};$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{M_z}{J_z} \cdot y = (13{,}29 \cdot (4 + x) + 12 - 20 \cdot x - 5 \cdot x^2) \cdot \dfrac{y}{J_z}; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \dfrac{Q \cdot S_z^w}{J_z \cdot b} = \dfrac{(-6{,}71 - 10 \cdot x)}{J_z \cdot b} \cdot \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right) = \dfrac{-(6{,}71 + 10 \cdot x)}{2 \cdot J_z} \cdot \left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right); \end{cases}$$

4.2. Проверим, удовлетворяют ли найденные напряжения дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -(6{,}71 + 10 \cdot x) \cdot \frac{y}{J_z}; \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{y \cdot (6{,}71 + 10 \cdot x)}{J_z};$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{10}{J_z \cdot 2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0;$$

$$\begin{cases} -(6{,}71 + 10 \cdot x) \cdot \dfrac{y}{J_z} + \dfrac{(6{,}71 + 10 \cdot x) \cdot y}{J_z} \equiv 0; -\text{условие выполняется;} \\ -\dfrac{5}{J_z} \cdot \left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right) + 0 \neq 0 - \text{условие не выполняется.} \end{cases}$$

4.3 Корректировка решения:

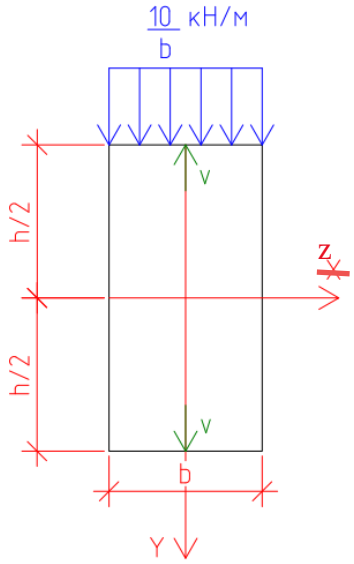
Пусть $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \neq 0$, тогда:

$$-\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0;$$

$$\sigma_y=\int\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)dy=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot y-\frac{y^3}{3}\right)+f(x)$$

Произвольную функцию $f(x)$ найдем из уравнений на поверхности:

$$\begin{cases}\bar{X}=\ \sigma_x\cdot l+\tau_{xy}\cdot m;\\ \bar{Y}=\tau_{xy}\cdot l+\sigma_y\cdot m.\end{cases}$$



Верхняя грань, $y=-\frac{h}{2}\rightarrow l=0; m=-1$

$\bar{X}=0;\ \bar{Y}=\frac{10}{b};$

$$\begin{cases}0=\ \sigma_x\cdot 0-1\cdot\tau_{xy};\\ \frac{10}{b}=\tau_{xy}\cdot 0-1\cdot\sigma_y.\end{cases}\begin{cases}\tau_{xy}=\tau_{yx}=0;\\ \sigma_y=-\frac{10}{b}.\end{cases}$$

Нижняя грань, $y=\frac{h}{2}\rightarrow l=0; m=1; \bar{X}=0;\ \bar{Y}=0$

$$\begin{cases}0=\ \sigma_x\cdot 0+1\cdot\tau_{xy};\\ 0=\tau_{xy}\cdot 0+1\cdot\sigma_y.\end{cases}\begin{cases}\tau_{xy}=\tau_{yx}=0;\\ \sigma_y=0.\end{cases}$$

Из условий на нижней грани:

$$\tau_{xy}\left(y=\frac{h}{2}\right)=\frac{(6{,}71+10\cdot x)}{2\cdot J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)=0-\text{выполняется}$$

$$\sigma_y\left(y=\frac{h}{2}\right)=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot\frac{h}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\right)+f(x)=0\rightarrow f(x)=-\frac{10\cdot h^3}{24\cdot J_z};$$

Из условий на верхней грани: $\sigma_y=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot y-\frac{y^3}{3}\right)-\frac{10\cdot h^3}{24\cdot J_z};$

$$\tau_{xy}\left(y=-\frac{h}{2}\right)=\frac{(6{,}71+10\cdot x)}{2\cdot J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-\left(-\frac{h}{2}\right)^2\right)=0-\text{выполняется;}$$

$$\sigma_y\left(y=-\frac{h}{2}\right)=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot\left(-\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right)-\frac{10\cdot h^3}{24\cdot J_z}=-\frac{20\cdot h^3}{24\cdot J_z}$$

$$=-\frac{20\cdot 12\cdot h^3}{24\cdot b\cdot h^3}=-\frac{10}{b};-\text{выполняется для прямоуг. сечения.}$$

5. Построение эпюр внутренних усилий (см. стр. 1).

6. Построение эпюр σ_y

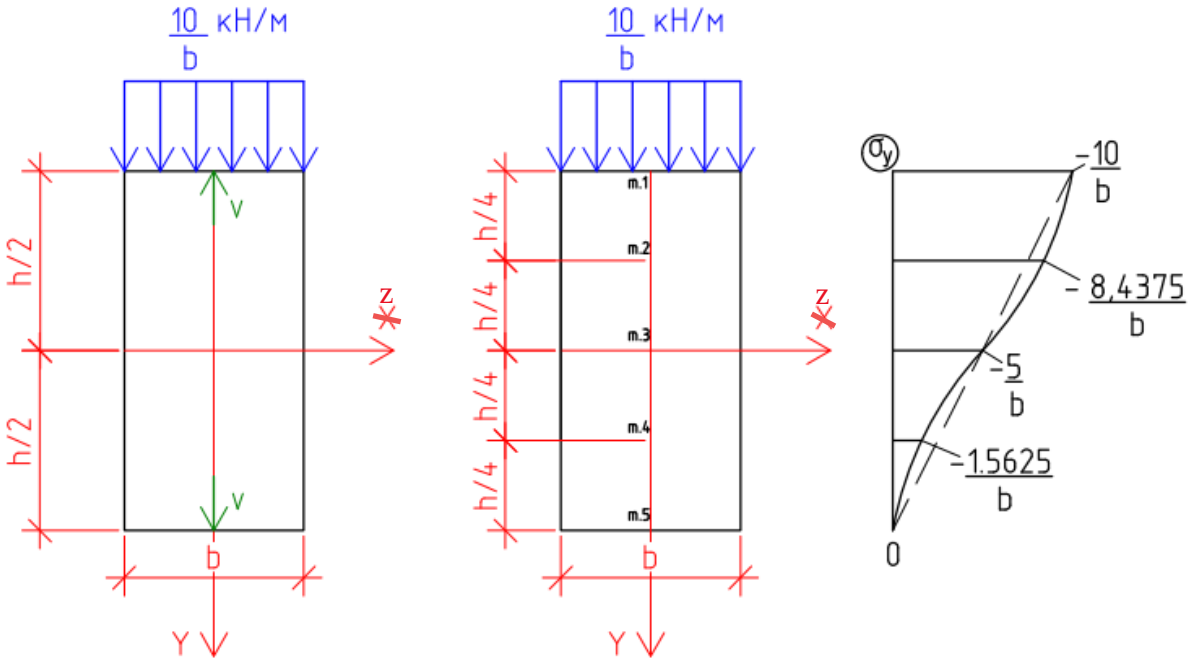
т.1: $\sigma_y\left(y=-\frac{h}{2}\right)=-\frac{10}{b}$;

т.2: $\sigma_y\left(y=-\frac{h}{4}\right)=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot\left(-\frac{h}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{h}{4}\right)^3\right)-\frac{10\cdot h^3}{24\cdot J_z}=-\frac{8{,}4375}{b}$;

т.3: $\sigma_y(y=0)=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0\right)-\frac{10\cdot h^3}{24\cdot J_z}=-\frac{5}{b}$;

т.4: $\sigma_y\left(y=\frac{h}{4}\right)=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot\frac{h}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^3\right)-\frac{10\cdot h^3}{24\cdot J_z}=-\frac{1{,}5625}{b}$;

т.5: $\sigma_y\left(y=\frac{h}{2}\right)=\frac{5}{J_z}\cdot\left(\frac{h^2}{4}\cdot\frac{h}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\right)-\frac{10\cdot h^3}{24\cdot J_z}=0$;



Вывод: напряжения в балке, найденные методами сопротивления материалов, удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия только на участках, где не приложены распределённые нагрузки.

Упр. №2 зачтено 25.10.23.